

LA DISTORSIÓN RADIAL Y SU REPRESENTACIÓN GRÁFICA

Oscar Cuadrado Méndez

Ingeniero Técnico en Topografía. Escuela Politécnica Superior de Ávila.

Ávila – España.

Resumen:

En este artículo se pretende mostrar gráficamente como actúan cada uno de los parámetros de la distorsión radial sobre una representación ideal de un objeto. Mediante un programa creado al efecto, se simularán las deformaciones producidas por esta aberración óptica, comparando los resultados obtenidos para cada uno de los valores de los parámetros impuestos. El objetivo básico del programa es la didáctica de esta disciplina

PALABRAS CLAVE: calibración, orientación interna, punto principal, distorsión, polinomio de distorsión.

Abstract:

In this article I'm trying to show graphically how is the behaviour for each of the parameters as regards the radial distortion above an ideal representation of an object. By means of a program created to show this, it's simulated the deformations produced by this optical aberration, showing a comparison between the results obtained for each one of the values from the allowed parameters. Basically the objective from de software is the didactic of this knowledge.

KEYWORDS: camera calibration, internal orientation, principal point, radial distortion, polynomial of distortion.

INTRODUCCIÓN

Continuamente podemos leer en las distintas publicaciones especializadas, distintas menciones acerca de las distorsiones que afectan a una imagen, y que son fruto de las imperfecciones de las que adolecen los sistemas de lentes.

Estas distorsiones son deformaciones que sufre la imagen de un objeto alejándola de su representación bidimensional “perfecta”.

En toda esta documentación siempre se define la distorsión, se muestra la expresión que da cuenta de la deformación, etc., pero en ningún caso se muestra una representación visual del efecto que produce la variación de cada uno de los parámetros que definen la expresión dada sobre una representación del objeto “ideal”.

El objetivo de este artículo es describir y mostrar los efectos de la distorsión radial en un fotograma, así como presentar un programa didáctico para evaluar la distorsión radial y los parámetros que la definen.

LA ORIENTACIÓN INTERNA

Este término describe la configuración geométrica interna para una cámara y su sistema de lentes. La configuración geométrica de un haz de rayos que pasa a través de un sistema de lentes puede ser definido matemáticamente por un conjunto de parámetros:

- **Distancia focal calibrada f :** valor numérico que se obtiene en la calibración de la distancia focal, siendo la distancia focal un parámetro óptico que define geometría del haz

perspectivo. Está ligada a los parámetros de distorsión radial. Se puede descomponer en dos términos en caso de absorber las deformaciones de la película.

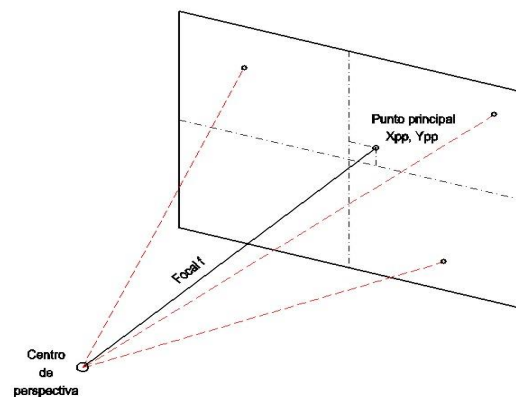


Fig. 1

Punto principal X_{pp} , Y_{pp} : punto de mejor simetría en la imagen. Se define mediante dos valores en el sistema de coordenadas del fotograma.

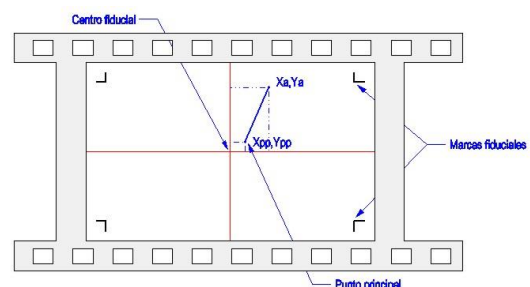


Fig. 2

- ❑ **Distorsión radial a_1, a_2, a_3, \dots** : deformación de la imagen, simétrica en torno a un punto. Este centro de simetría va a ser el punto principal. Esta distorsión es obtenida durante el proceso de calibración, exclusivamente, para una distancia focal calibrada obtenida en ese mismo proceso.
- ❑ **Distorsión tangencial p_1, p_2** : deformación de la imagen (antisimétrica alrededor del centro) y producida por una falta de alineación de las lentes y su perpendicularidad al plano imagen. Igualmente es obtenida junto con el resto de los parámetros de calibración y para un uso conjunto con el resto.
- ❑ **Placa Reseau**: malla formada por un conjunto de marcas fiduciales con una distribución reticulada. Su propósito es controlar las deformaciones de la película.

Antes de continuar debemos tener en cuenta que:

- I. Ninguna cámara posee un sistema óptico perfecto.
- II. Todas las lentes están afectadas de aberraciones.
- III. Estas aberraciones se dividen en dos grupos:
 - A. Las aberraciones que afectan a la calidad "visual" de la imagen:
 - Curvatura de campo.
 - Aberración esférica.
 - Astigmatismo
 - Aberración cromática.
 - Coma.
 - B. Las aberraciones que deforman la geometría de la imagen. Se altera la posición ideal del punto.
 - Distorsión radial simétrica.
 - Distorsión tangencial o asimétrica.

En este estudio nos vamos a centrar en la distorsión radial simétrica.

DISTORSIÓN RADIAL SIMÉTRICA

La distorsión radial es una de las aberraciones de Seidel, que se presenta como la alteración de la semejanza entre el objeto y la imagen. Esta aberración causa la deformación de la imagen, es decir, una recta pasa a representarse como una curva.

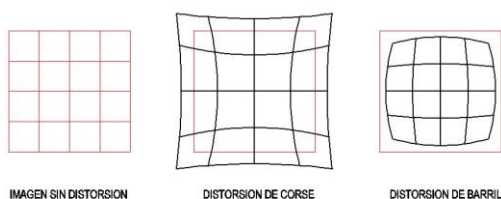


Fig. 3

Si la imagen de un objeto en el espacio no está situada correctamente en el plano imagen y se producen deformaciones diremos que la imagen está afectada por distorsiones, es decir, la imagen del objeto está desplazada radialmente desde el punto principal de autocolimación hacia fuera o hacia adentro.

Las denominaciones de barrilete (negativa) y en corsé o cojín (positiva) definen hacia donde se distorsiona la imagen, acercándose o alejándose del punto principal.

El punto de simetría para la distorsión radial o punto principal de autocolimación no coincide exactamente con el punto principal, pero es corriente utilizar este como tal.

La distorsión radial de una lente puede representarse gráficamente, siendo el eje de ordenadas la distorsión en micrómetros y el eje de abscisas la distancia radial en mm.

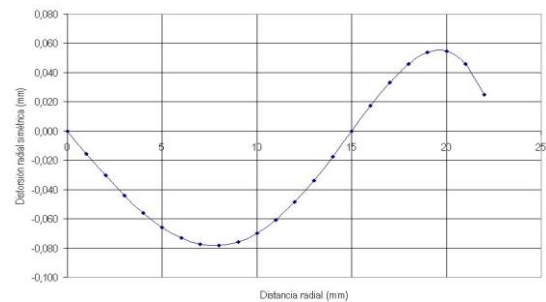


Fig. 4

La distorsión radial está definida mediante un conjunto de parámetros matemáticos que describen la deformación de la imagen. Es radial respecto del punto de mejor simetría.

La formulación para la distorsión radial deriva de las teorías de SEIDEL. Para dar cuenta de esta aberración se emplea la expresión polinómica en serie

$$\Delta r = a_0 \cdot r + a_1 \cdot r^3 + a_2 \cdot r^5 + a_3 \cdot r^7 \dots$$

$$r^2 = (x - X_{pp})^2 + (y + Y_{pp})^2$$

como modelo matemático de la distorsión

$$\frac{\Delta r}{r} = a_0 + a_1 \cdot r^2 + a_2 \cdot r^4 + a_3 \cdot r^6 = \frac{\Delta x}{x - X_{pp}} = \frac{\Delta y}{y - Y_{pp}}$$

siendo:

r : la distancia radial desde el punto de mejor simetría al punto cuya distorsión, a lo largo de esa misma distancia, se quiere determinar. Es decir, lo que queremos calcular es cuanto se ha deformado en esa dirección y a esa distancia del punto principal.

a_i : coeficientes de la distorsión radial correspondiente a un sistema enfocado a infinito.

Δr : Distorsión radial en milímetros.

x, y : Coordenadas instrumentales del punto distorsionado en milímetros.

X_{pp}, Y_{pp}: Coordenadas del punto principal en milímetros.

Para la mayoría de las cámaras de aficionado (35-70 mm) basta con tomar el primer término.

La distorsión radial varía con el enfoque de la lente, y para un enfoque determinado la distorsión radial varía dependiendo de la distancia de los puntos a la cámara. Es importante tener en cuenta esto último al trabajar en fotogrametría terrestre, ya que normalmente se suele variar el enfoque (o la distancia objeto.)

Se define **distorsión Gaussiana** a la distorsión radial obtenida utilizando una distancia principal para el cálculo. Esta deformación varía en función de la distancia radial, del enfoque (distancia al objeto) y la focal calibrada.

$$\Delta r = a_1 \cdot r^3 + a_2 \cdot r^5 + a_3 \cdot r^7 + \dots$$

La **distorsión radial equilibrada** es el término utilizado cuando la curva Gaussiana ha sido transformada matemáticamente. $a_0 \cdot r$ es un factor de escala. Tiene ventaja estética exclusivamente y a efectos de computación no es interesante.

$$\Delta r = a_0 \cdot r + a_1 \cdot r^3 + a_2 \cdot r^5 + a_3 \cdot r^7$$

OTRAS FORMAS DE EXPRESIÓN.

Existen otras formas distintas de expresar los distintos parámetros de la distorsión radial, aunque sea la expresada anteriormente la más empleada. Independientemente de la expresión utilizada es necesario tener en cuenta:

- Sistema de unidades de entrada y salida.
- Sistema de coordenadas.
- Expresiones matemáticas utilizadas en el cálculo.

Las distintas formas de expresar la distorsión serían:

I. En forma polinómica (ya vista).

$$\Delta r = a_0 \cdot r + a_1 \cdot r^3 + a_2 \cdot r^5 + a_3 \cdot r^7$$

II. Expresada en formato tabla radio - desplazamiento (mm-micras)

r (mm)	desplazamiento (mm)
0	0,0000
1	-0,0182
2	-0,0359
3	-0,0523
4	-0,0671
5	-0,0796

III. Mediante fórmula empleada por el ISPRS.

$$\Delta r = a_1 \cdot r \cdot (r^2 - r_0^2) + a_2 \cdot r \cdot (r^4 - r_0^4) + a_3 \cdot r \cdot (r^6 - r_0^6)$$

r₀: segundo punto de corte de la curva Gaussiana con la línea de distorsión 0 en la gráfica. Como se puede observar si r₀=0

entonces obtenemos la fórmula clásica del polinomio.

CORRECCIONES

Para corregir las deformaciones utilizaremos la fórmula general:

$$X_{CORREG} = X_{DISTROR} + \Delta r_x$$

$$Y_{CORREG} = Y_{DISTROR} + \Delta r_y$$

Dado que la distorsión radial puede expresarse mediante un polinomio en serie, el signo negativo de la fórmula vista en los contenidos prácticos estará absorbido por los términos a_i de dicho polinomio.

Finalmente obtendremos unas coordenadas imagen corregidas de distorsión.

EJEMPLO PRÁCTICO

En el ejemplo mostrado a continuación se puede apreciar los resultados de las distorsiones y su corrección.

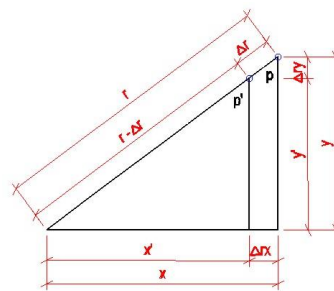


Fig. 5

P Punto medido sobre la fotografía. (X, Y).

P' Punto corregido de distorsión. (X', Y').

Para simplificar suponemos:

$$X_{pp}=0$$

$$Y_{pp}=0$$

Ahora vamos a suponer unos valores para cada una de las variables a partir de unos parámetros para la distorsión impuestos.

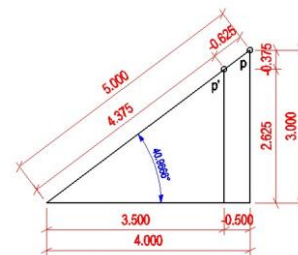


Fig. 6

Por proporcionalidad:

$$\Delta r / r = \Delta r_x / X = \Delta r_y / Y$$

$$\Delta r_x = (\Delta r / r) \cdot X$$

$$\Delta r_y = (\Delta r / r) \cdot Y$$

Finalmente:

$$X' = X + (\Delta r / r) \cdot X$$

$$Y' = Y + (\Delta r / r) \cdot Y$$

Utilizando los datos arriba mostrados:

$$-0.625/5 = -0.5/4 = -0.375/3 = -0.125$$

$$X' = 4 \cdot (1 - 0.125) = 3.50$$

$$Y' = 3 \cdot (1 + 0.125) = 2.625$$

Al aplicar la fórmula de distorsión para este radio r y para unos valores de los parámetros determinados, conocemos el valor de la distorsión y su signo.

SIMULACIÓN DE LA DISTORSIÓN RADIAL

Para ello se ha realizado un programa utilizando un lenguaje de programación de alto nivel: Visual Basic 6.0. Mediante este programa vamos a visualizar en la pantalla las deformaciones que se producen en un fotograma virtual y sobre un objeto de geometría sencilla como puede ser un rectángulo. Este elemento se va a ver afectado de unos errores en función de los valores que asignemos para cada uno de los parámetros a_i del polinomio. Además de visualizar la deformación del fotograma podremos evaluar la curva de distorsión Gaussiana y las tablas de coordenadas para los puntos sin distorsionar y distorsionados.

El uso de la interfaz es intuitivo pudiendo disponer en todo momento de una ayuda en la cual se ha insertado toda la teoría necesaria para una comprensión correcta del tema.

A continuación se muestran unas pantallas del programa Simulación...

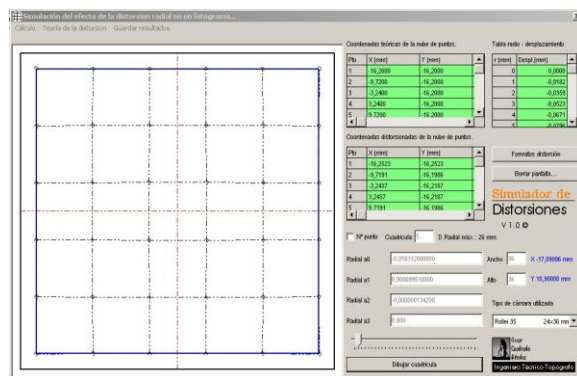


Fig. 7

En la ventana anterior se muestran las tablas de coordenadas calculadas y el fotograma distorsionado.

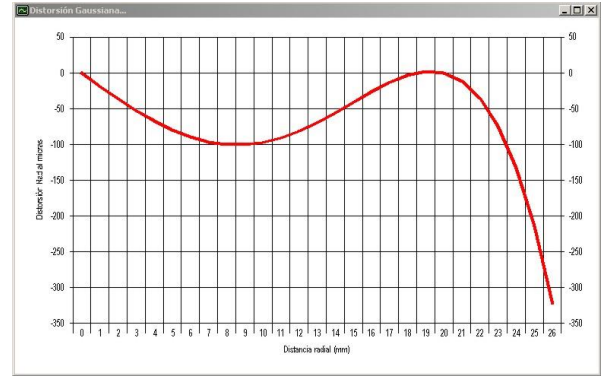


Fig. 8

En esta ventana se muestra la curva de distorsión Gaussiana.

En la ventana principal de la aplicación podemos modificar cada uno de los parámetros que definen la distorsión, calculando mediante un sistema iterativo las coordenadas de los puntos distorsionados a partir de una coordenadas corregidas impuestas a priori.

En una segunda ventana podemos visualizar la curva de distorsión comparando los resultados del fotograma distorsionado con los datos de la curva.

El programa nos da la opción de elegir entre cuatro ejemplos prácticos mediante la selección de los parámetros de cuatro tipos de cámaras existentes en el mercado y cuyos valores se han obtenido de los respectivos certificados de calibración.

CONCLUSIONES

En este proyecto se ha pretendido crear una herramienta de trabajo sencilla para facilitar al usuario el aprendizaje de esta disciplina.

En el mercado actual escasea hoy en día o más bien diríamos que no existe un software fotogramétrico con una clara aplicación didáctica. Es por esto por lo que se ha pretendido seguir la línea de investigación abierta por el profesor Javier Gómez Lahoz (Departamento de Ingeniería Cartográfica y del Terreno), desarrollando software con un marcado carácter docente.

En las futuras versiones del simulador se implementaran distintos módulos de cálculo que permitan transformar los parámetros de la distorsión entre los distintos formatos de expresión más utilizados.

EJEMPLOS RADIO-DISTORSIÓN

Para hacer una evaluación de la distorsión radial en función de los signos de los parámetros se incluyen a continuación algunos ejemplos:

- $a_1 = 6,3200E-04$; $a_2 = 1,0300E-06$

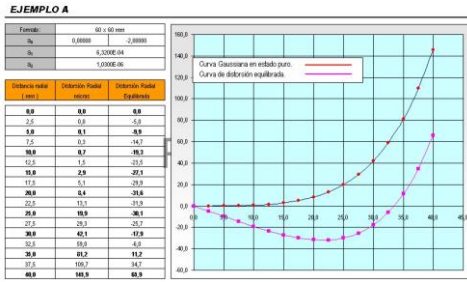


Fig. 9

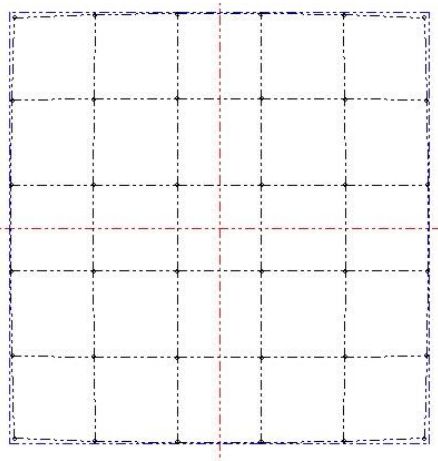


Fig. 10

- $a_1 = 6,3200E-04$; $a_2 = -1,0300E-06$

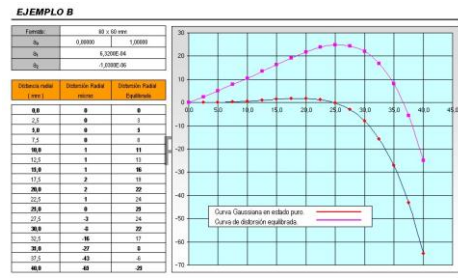


Fig. 13

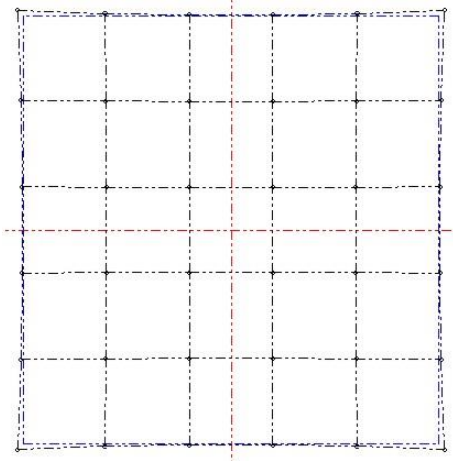


Fig. 14

- $a_1 = -6,3200E-04$; $a_2 = -1,0300E-06$

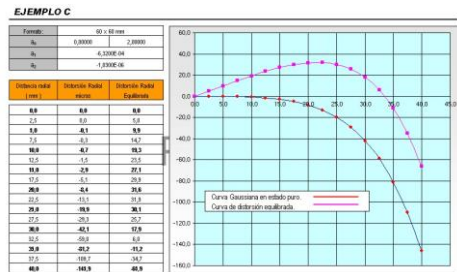


Fig. 11

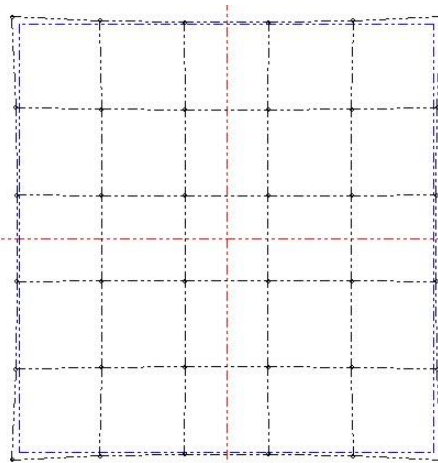


Fig. 12

- $a_1 = -6,3200E-04$; $a_2 = 1,0300E-06$

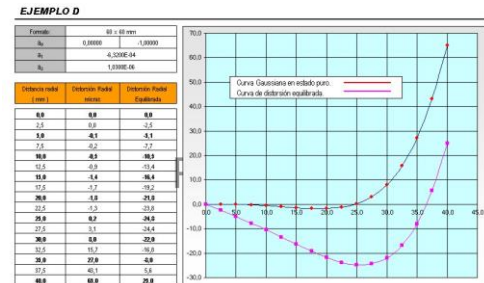


Fig. 15

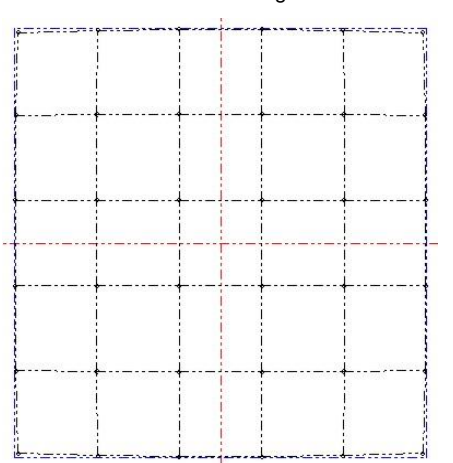


Fig. 16

COMPROBACIÓN DE LOS DATOS OBTENIDOS POR LA APLICACIÓN

Formato:	24x36
a_0	-0.018332000000
a_1	0.000099510000
a_2	-0.000000134200

COMPROBACION DE LOS CALCULOS EFECTUADOS POR EL SIMULADOR

ROLLEI 35 mm

Datos de calibración obtenidos del certificado de calibración original de la cámara.

Nº PTO	Coord. X	Coord. Y	Dist. Radial (mm)	Distorsión Radial mm	Coord. X	Coord. Y	Introducidas a priori para el cálculo		Diferencias	
	Distorsionada	Distorsionada			Corregida	Corregida	X corr	y corr	dX	dY
1	-16,2523	-16,2523	22,9842	-0,0738972	-16,2000	-16,2000	-16,2000	-16,2000	0,0000	0,0000
2	-9,7191	-16,1986	18,8906	0,0016790	-9,7200	-16,2000	-9,7200	-16,2000	0,0000	0,0000
3	-3,2437	-16,2187	16,5399	-0,0190656	-3,2400	-16,2000	-3,2400	-16,2000	0,0000	0,0000
4	3,2437	-16,2187	16,5399	-0,0190656	3,2400	-16,2000	3,2400	-16,2000	0,0000	0,0000
5	9,7191	-16,1986	18,8906	0,0016790	9,7200	-16,2000	9,7200	-16,2000	0,0000	0,0000
6	16,2523	-16,2523	22,9842	-0,0738972	16,2000	-16,2000	16,2000	-16,2000	0,0000	0,0000
7	-16,1986	-9,7191	18,8906	0,0016790	-16,2000	-9,7200	-16,2000	-9,7200	0,0000	0,0000
8	-9,7614	-9,7614	13,8047	-0,0585612	-9,7200	-9,7200	-9,7200	-9,7200	0,0000	0,0000
9	-3,2702	-9,8105	10,3412	-0,0953987	-3,2400	-9,7200	-3,2400	-9,7200	0,0000	0,0000
10	3,2702	-9,8105	10,3412	-0,0953987	3,2400	-9,7200	3,2400	-9,7200	0,0000	0,0000
11	9,7614	-9,7614	13,8047	-0,0585612	9,7200	-9,7200	9,7200	-9,7200	0,0000	0,0000
12	16,1986	-9,7191	18,8906	0,0016790	16,2000	-9,7200	16,2000	-9,7200	0,0000	0,0000
13	-16,2187	-3,2437	16,5399	-0,0190656	-16,2000	-3,2400	-16,2000	-3,2400	0,0000	0,0000
14	-9,8105	-3,2702	10,3412	-0,0953987	-9,7200	-3,2400	-9,7200	-3,2400	0,0000	0,0000
15	-3,2935	-3,2935	4,6577	-0,0756243	-3,2400	-3,2400	-3,2400	-3,2400	0,0000	0,0000
16	3,2935	-3,2935	4,6577	-0,0756243	3,2400	-3,2400	3,2400	-3,2400	0,0000	0,0000
17	9,8105	-3,2702	10,3412	-0,0953987	9,7200	-3,2400	9,7200	-3,2400	0,0000	0,0000
18	16,2187	-3,2437	16,5399	-0,0190656	16,2000	-3,2400	16,2000	-3,2400	0,0000	0,0000
19	-16,2187	3,2437	16,5399	-0,0190656	-16,2000	3,2400	-16,2000	3,2400	0,0000	0,0000
20	-9,8105	3,2702	10,3412	-0,0953987	-9,7200	3,2400	-9,7200	3,2400	0,0000	0,0000
21	-3,2935	3,2935	4,6577	-0,0756243	-3,2400	3,2400	-3,2400	3,2400	0,0000	0,0000
22	3,2935	3,2935	4,6577	-0,0756243	3,2400	3,2400	3,2400	3,2400	0,0000	0,0000
23	9,8105	3,2702	10,3412	-0,0953987	9,7200	3,2400	9,7200	3,2400	0,0000	0,0000
24	16,2187	3,2437	16,5399	-0,0190656	16,2000	3,2400	16,2000	3,2400	0,0000	0,0000
25	-16,1986	9,7191	18,8906	0,0016790	-16,2000	9,7200	-16,2000	9,7200	0,0000	0,0000
26	-9,7614	9,7614	13,8047	-0,0585612	-9,7200	9,7200	-9,7200	9,7200	0,0000	0,0000
27	-3,2702	9,8105	10,3412	-0,0953987	-3,2400	9,7200	-3,2400	9,7200	0,0000	0,0000
28	3,2702	9,8105	10,3412	-0,0953987	3,2400	9,7200	3,2400	9,7200	0,0000	0,0000
29	9,7614	9,7614	13,8047	-0,0585612	9,7200	9,7200	9,7200	9,7200	0,0000	0,0000
30	16,1986	9,7191	18,8906	0,0016790	16,2000	9,7200	16,2000	9,7200	0,0000	0,0000
31	-16,2523	16,2523	22,9842	-0,0738972	-16,2000	16,2000	-16,2000	16,2000	0,0000	0,0000
32	-9,7191	16,1986	18,8906	0,0016790	-9,7200	16,2000	-9,7200	16,2000	0,0000	0,0000
33	-3,2437	16,2187	16,5399	-0,0190656	-3,2400	16,2000	-3,2400	16,2000	0,0000	0,0000
34	3,2437	16,2187	16,5399	-0,0190656	3,2400	16,2000	3,2400	16,2000	0,0000	0,0000
35	9,7191	16,1986	18,8906	0,0016790	9,7200	16,2000	9,7200	16,2000	0,0000	0,0000
36	16,2523	16,2523	22,9842	-0,0738972	16,2000	16,2000	16,2000	16,2000	0,0000	0,0000

Fig. 17

BIBLIOGRAFÍA

Fryer J.G.; *Close Range Photogrammetry and Machine Vision*. Atkinson, K.B.; UK (1996). Cap. 6, 156-179. ISBN: 1-870325-46-X.

Ghosh S.K.; *Analytical Photogrammetry*. Pergamon Press; Oxford (1988). Cap. 5, 112-121.

Kraus K; *Photogrammetry Volume I*. Dümmler/Bonn; Germany (1993). Cap. 3, 29-37. ISBN: 3-427-78684-6.

Kraus K; *Photogrammetry Volume II*. Dümmler/Bonn; Germany (1997). Cap. E, 440-451. ISBN: 3-427-78694-3.

De la Escalera A.; *Visión por computador*. Prentice Hall; Madrid (2001). Cap. 2, 32-60. ISBN: 84-205-3098-0.

Fraser C.S.; Digital camera self-calibration. ISPRS Journal of Photogrammetry & Remote Sensing 52; Melbourne (1997). 149-159.

Fraser C.S.; The metric impact of reduction optics in digital cameras. *Photogrammetric Record* 15; Melbourne (1996). 437-446.

Fryer J.G.; Camera calibration in non-topographic Photogrammetry. *Non topographic Photogrammetry*, ASPRS; Falls Church (1989). 59-68.

<http://www.technet-gmbh.com/>

<http://www.rolleimetric.de/startie.html>

<http://www.imagefact.de/>

<http://www.ifp.uni-stuttgart.de/en/>

<http://cipa.uibk.ac.at/>

<http://www.isprs.org/>

<http://www.asprs.org/>

<http://www.photodeler.com/>

<http://www.lh-systems.com/>

<http://www.photsoc.org.uk/>